

UNIVERSITY OF TWENTE.

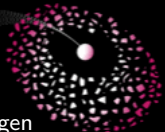
Formal Methods & Tools.

Analytische meetkunde door een synthetische bril

Mark Timmer
4 februari 2012

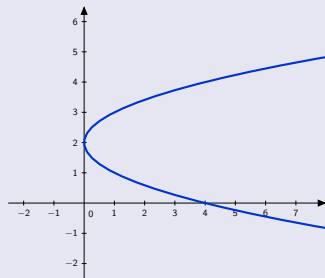
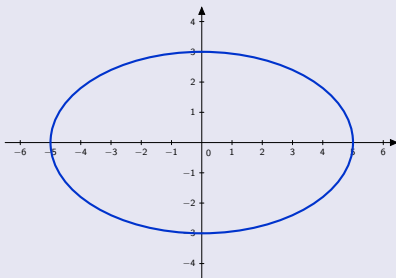
Nationale Wiskunde Dagen

*In samenwerking met
Gerard Jeurnink en Nellie Verhoef*



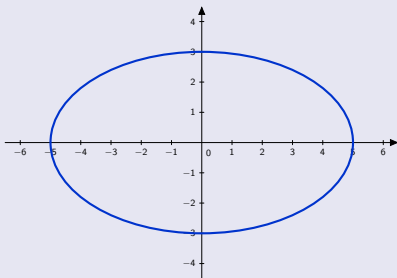
Analytische meetkunde

Vergelijkingen voor meetkundige figuren

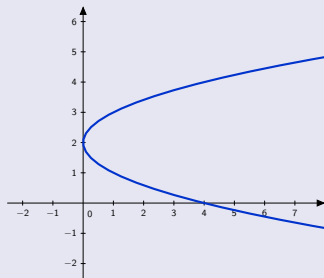


Analytische meetkunde

Vergelijkingen voor meetkundige figuren



$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



$$(y - 2)^2 = 4x$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$

$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$
$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$
$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0$$

$$(a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$
$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$
$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$

$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

$$2ab - 4b = -2ab + 4b$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$

$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

$$2ab - 4b = -2ab + 4b$$

$$2a - 4 = -2a + 4$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$

$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

$$2ab - 4b = -2ab + 4b$$

$$2a - 4 = -2a + 4$$

$$4a = 8$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$

$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

$$2ab - 4b = -2ab + 4b$$

$$2a - 4 = -2a + 4$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 2

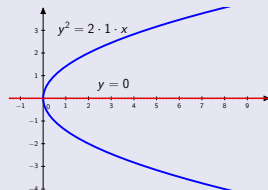
- De standaardvergelijking van een liggende parabool is $y^2 = 2px$.

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 2

- De standaardvergelijking van een liggende parabool is $y^2 = 2px$.
- Zo'n parabool gaat precies door de oorsprong, en heeft zijn as ($y = 0$) als symmetrielijns.

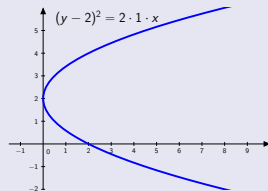
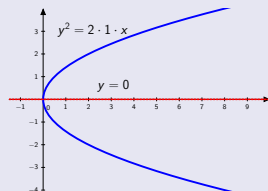


Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 2

- De standaardvergelijking van een liggende parabool is $y^2 = 2px$.
- Zo'n parabool gaat precies door de oorsprong, en heeft zijn as ($y = 0$) als symmetrielijns.
- De gegeven vergelijking is ook van deze vorm, alleen is hij 2 omhoog verschoven.

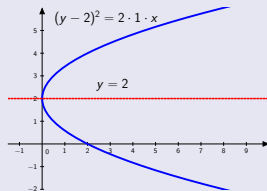
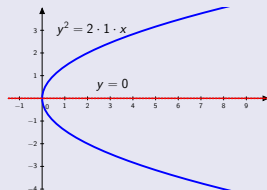


Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 2

- De standaardvergelijking van een liggende parabool is $y^2 = 2px$.
- Zo'n parabool gaat precies door de oorsprong, en heeft zijn as ($y = 0$) als symmetrielijns.
- De gegeven vergelijking is ook van deze vorm, alleen is hij 2 omhoog verschoven.
- De symmetrielijns is dus gegeven door $y = 2$.



Onderzoeksvraag

“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”

Onderzoeksvraag

*“Leidt het benadrukken van **onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde**, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”*

Synthetische meetkunde:

- Parabolen
- Cirkels
- Ellipsen
- Hyperbolen

Onderzoeksvraag

*“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel **gevisualiseerd door middel van GeoGebra**, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”*

Synthetische meetkunde:

- Parabolen
- Cirkels
- Ellipsen
- Hyperbolen



Onderzoeksvraag

“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 ([Analytische meetkunde](#) – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”

Synthetische meetkunde:

- Parabolen
- Cirkels
- Ellipsen
- Hyperbolen



Onderzoeksvraag

*“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot **rijkere cognitieve eenheden**?”*

Synthetische meetkunde:

- Parabolen
- Cirkels
- Ellipsen
- Hyperbolen



Cognitieve eenheden

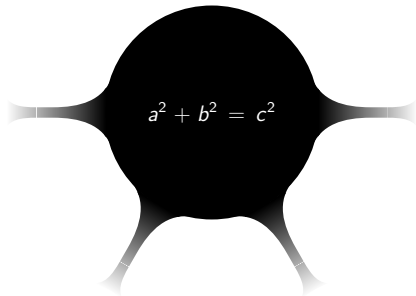
*“Een **cognitieve eenheid** bestaat uit een cognitief item waar een individu zijn aandacht op kan focussen, samen met andere ideeën die daar direct aan verbonden zijn.”
(Tall & Barnard, 2002)*

Cognitieve eenheden

*“Een **cognitieve eenheid** bestaat uit een **cognitief item** waar een individu zijn **aandacht op kan focussen**, samen met andere ideeën die daar direct aan verbonden zijn.”*
(Tall & Barnard, 2002)

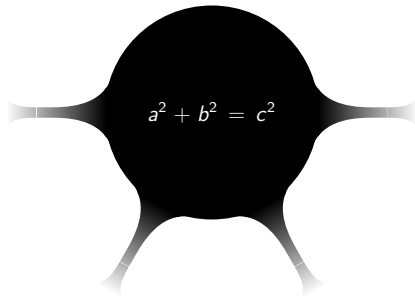
Cognitieve eenheden

*“Een **cognitieve eenheid** bestaat uit een **cognitief item** waar een individu zijn **aandacht op kan focussen**, samen met andere ideeën die daar direct aan verbonden zijn.”*
(Tall & Barnard, 2002)



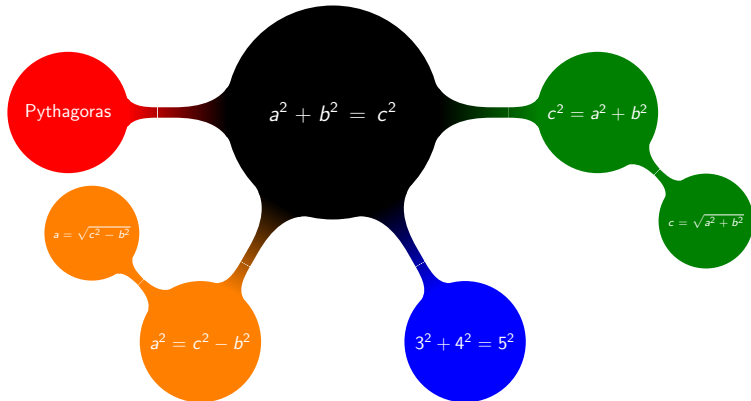
Cognitieve eenheden

“Een *cognitieve eenheid* bestaat uit een *cognitief item* waar een individu zijn *aandacht op kan focussen*, samen met *andere ideeën* die daar *direct aan verbonden* zijn.”
(Tall & Barnard, 2002)



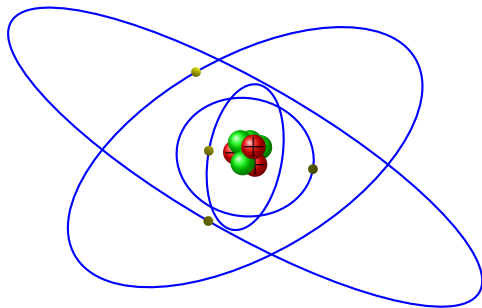
Cognitieve eenheden

“Een *cognitieve eenheid* bestaat uit een *cognitief item* waar een individu zijn *aandacht op kan focussen*, samen met *andere ideeën* die daar *direct aan verbonden* zijn.”
(Tall & Barnard, 2002)



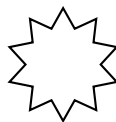
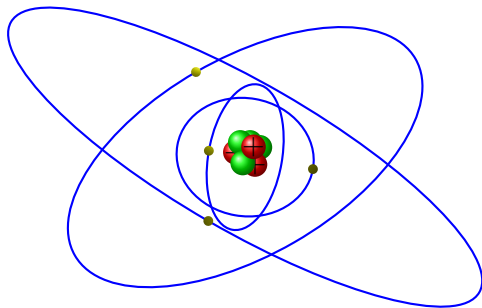
Rijke cognitieve eenheden

Mentale samenpersing:



Rijke cognitieve eenheden

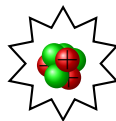
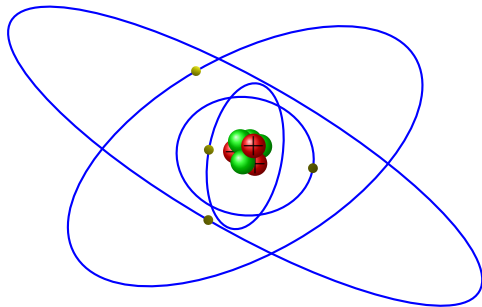
Mentale samenpersing:



Cognitieve eenheid

Rijke cognitieve eenheden

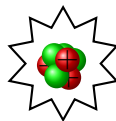
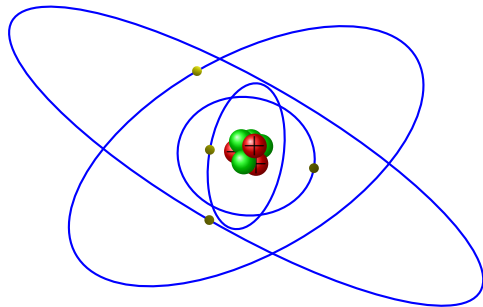
Mentale samenpersing:



Cognitieve eenheid

Rijke cognitieve eenheden

Mentale samenpersing:

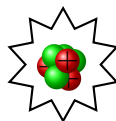
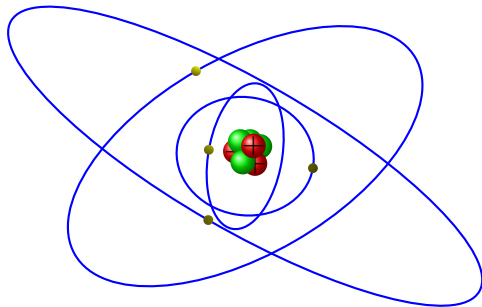


Cognitieve eenheid

- Samenpersen van kennis tot **kleine** cognitieve items

Rijke cognitieve eenheden

Mentale samenpersing:

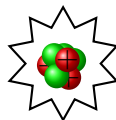
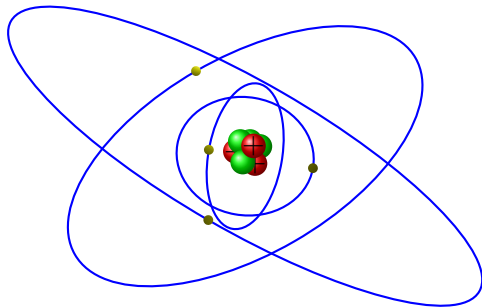


Cognitieve eenheid

- Samenpersen van kennis tot **kleine cognitieve items**
- **Koppelen** van verschillende cognitieve items tot **sterkverbonden cognitieve eenheden**

Rijke cognitieve eenheden

Mentale samenpersing:



Cognitieve eenheid

- Samenpersen van kennis tot **kleine cognitieve items**
- **Koppelen** van verschillende cognitieve items tot **sterkverbonden cognitieve eenheden**

Totstandbrenging:

- Categorisatie
- Naamgeving
- Abstractie
- Langetermijnpotentiatie

Visualisatie door middel van GeoGebra

Demo

Visualisatie door middel van GeoGebra

Mogelijke sterke punten van visualisatie / meetkundesoftware:

- Conceptueel begrip vergroten
- Relaties tussen concepten ontdekken (*dragging*)
- Betere beeldvorming van abstracte concepten
- Motiverend

Visualisatie door middel van GeoGebra

Mogelijke sterke punten van visualisatie / meetkundesoftware:

- **Conceptueel begrip** vergroten
- **Relaties** tussen concepten ontdekken (*dragging*)
- Betere **beeldvorming** van abstracte concepten
- **Motiverend**

Valkuilen:

- **Redeneervaardigheden** worden niet altijd bevorderd
- **Interpretatie** van getoonde visualisaties niet altijd eenvoudig
- **Te vroeg** met mooie plaatjes komen
- Werkt slechts als **aanvulling** op niet-technologische bronnen

Visualisatie door middel van GeoGebra

Mogelijke sterke punten van visualisatie / meetkundesoftware:

- Conceptueel begrip vergroten
- Relaties tussen concepten ontdekken (*dragging*)
- Betere beeldvorming van abstracte concepten
- Motiverend

Valkuilen:

- Redeneervaardigheden worden niet altijd bevorderd
- Interpretatie van getoonde visualisaties niet altijd eenvoudig
- Te vroeg met mooie plaatjes komen
- Werkt slechts als aanvulling op niet-technologische bronnen

In dit onderzoek:

- Visualisatie van reeds bekende concepten (incl. *dragging*)
- Niet slechts plaatjes kijken; uitleg bij de beelden
- Veelvuldig vergezeld door extra opgaven

De onderzoeksopzet

Deelnemers:

- Stedelijk Lyceum Kottenpark, Enschede
- VWO 5 – Wiskunde D



De onderzoeksopzet

Deelnemers:

- Stedelijk Lyceum Kottenpark, Enschede
- VWO 5 – Wiskunde D



Kwalitatief onderzoek: veel inzicht krijgen in een kleine populatie

De onderzoeksopzet

Deelnemers:

- Stedelijk Lyceum Kottenpark, Enschede
- VWO 5 – Wiskunde D



Kwalitatief onderzoek: veel inzicht krijgen in een kleine populatie

- 1 Pretest (interviews)
- 2 Twaalf lessen
- 3 Posttest (interviews)

Posttest

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

Opgave 2. Gegeven is de familie van ellipsen $e_k: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$, met $k > 0$.

- (a) Het punt $P(x_P, 0)$ ligt op ieder van deze ellipsen. Welke waarden kan x_P hebben?
- (b) Voor precies één waarde van k geldt dat het punt $Q(3, 5)$ op de ellips e_k ligt. Op deze ellips e_k ligt ook het punt $R(-3, y_R)$. Welke waarden kan y_R hebben?

Opgave 3. Beschouw de ellips $e: \frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6, 0)$. Geef een vergelijking voor een raaklijn aan e door A .

Opgave 4. Gegeven is de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ en een punt $P(8, 2)$.

- (a) Geef de vergelijking van de ellips.
- (b) Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x -coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

Posttest

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

Opgave 2. Gegeven is de familie van ellipsen $e_k: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$, met $k > 0$.

- (a) Het punt $P(x_P, 0)$ ligt op ieder van deze ellipsen. Welke waarden kan x_P hebben?
- (b) Voor precies één waarde van k geldt dat het punt P op de ellips e_k ligt. Op deze ellips e_k ligt ook het punt R . Welke waarden kan y_R hebben?

Opgave 3. Beschouw de ellips $e: \frac{(x-3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6,0)$. Geef een vergelijking van de lijn die raakt aan e door A .

Opgave 4. Beschouw de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel $c: (x-5)^2 + (y-2)^2 = 25$ en een punt $P(8,2)$.

- (a) Geef de vergelijking van de ellips.
- (b) Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x -coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

Het is aan u om deze opgaven slim op te lossen!

Slimme uitwerkingen

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk.

Slimme uitwerkingen

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk.

Uitwerking:

- De ellips is de conflictlijn van een brandpunt en een richtcirkel.
- De ellips is de verzameling van punten met gelijke opgetelde afstand tot twee brandpunten.
- De ellips is de oplossing van de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ voor bepaalde a, b .
- De parameters a en b bepalen de toppen van de ellips.
- De parameters a en b bepalen de brandpunten via de hulpparameter $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.
- De ellips is een generalisatie van de cirkel.
- De ellips kan zich overal in een assenstelsel bevinden en hoeft niet per sé tegen de oorsprong aan te liggen.
- Het verplaatsen van een ellips over (p, q) komt overeen met substitutie van x en y door $x - p$ en $y - q$ in de vergelijking.
- Het spiegelen van een ellips in de x -as of y -as komt overeen met het substitueren van $-y$ of $-x$ voor y of x .

Slimme uitwerkingen

Opgave 2. Gegeven is de familie van ellipsen $e_k : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$, met $k > 0$.

- (a) Het punt $P(x_P, 0)$ ligt op ieder van deze ellipsen. Welke waarden kan x_P hebben?
- (b) Voor precies één waarde van k geldt dat het punt $Q(3, 5)$ op de ellips e_k ligt. Op deze ellips e_k ligt ook het punt $R(-3, y_R)$. Welke waarden kan y_R hebben?

Slimme uitwerkingen

Opgave 2. Gegeven is de familie van ellipsen $e_k : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$, met $k > 0$.

- (a) Het punt $P(x_P, 0)$ ligt op ieder van deze ellipsen. Welke waarden kan x_P hebben?
- (b) Voor precies één waarde van k geldt dat het punt $Q(3, 5)$ op de ellips e_k ligt. Op deze ellips e_k ligt ook het punt $R(-3, y_R)$. Welke waarden kan y_R hebben?

Uitwerking:

- (a) De noemer van de term met x^2 is het kwadraat van de halve lengte van de horizontale as van de ellips. Hier volgt direct uit dat $x_P = -4$ of $x_P = 4$.
- (b) Vanwege de symmetrie van de ellips in de lijnen $y = 0$ en $x = 0$ geldt $y_R = -5$ of $y_R = 5$.

Slimme uitwerkingen

Opgave 3. Beschouw de ellips $e: \frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6,0)$. Geef een vergelijking voor een raaklijn aan e door A .

Slimme uitwerkingen

Opgave 3. Beschouw de ellips $e: \frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6,0)$. Geef een vergelijking voor een raaklijn aan e door A .

Uitwerking:

- Uit de vergelijking volgt direct $b^2 = 9$ en dus $b = 3$. Bovendien is de verticale verschuiving ook gelijk aan 3. De ellips raakt dus aan de x -as; aangezien het punt $A(6,0)$ ook op de x -as ligt, is $y = 0$ een vergelijking van een van de raaklijnen.

Slimme uitwerkingen

Opgave 4. Gegeven is de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ en een punt $P(8, 2)$.

- (a) Geef de vergelijking van de ellips.
- (b) Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x -coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

Slimme uitwerkingen

Opgave 4. Gegeven is de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ en een punt $P(8, 2)$.

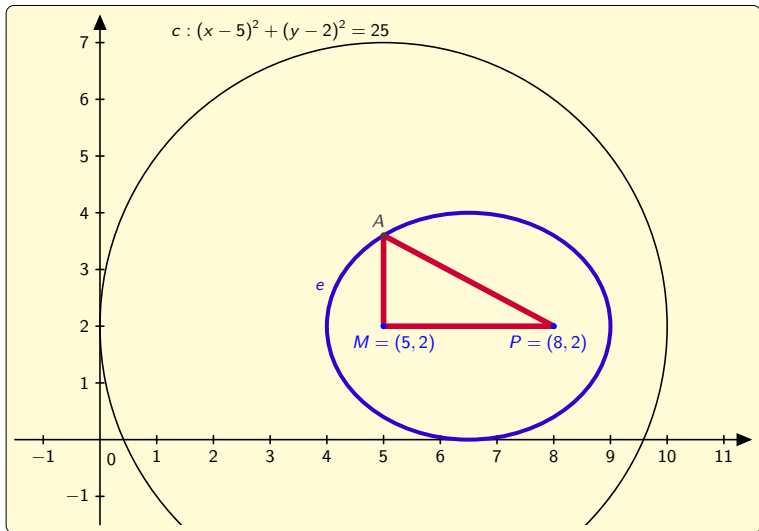
- (a) Geef de vergelijking van de ellips.
- (b) Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x -coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

Uitwerking:

- (a) De brandpunten zijn $M(5, 2)$ en $P(8, 2)$, dus $c = 1\frac{1}{2}$ en het midden van de ellips is $(6\frac{1}{2}, 2)$. Verder ligt $(10, 2)$ op de cirkel, en dus $(9, 2)$ op de ellips. Dus, $a = 2\frac{1}{2}$. We berekenen nou eenvoudig dat $b^2 = a^2 - c^2 = 6\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} = 4$. Dus,

$$e: \frac{(x - 6\frac{1}{2})^2}{6\frac{1}{4}} + \frac{(y - 2)^2}{4} = 1$$

Slimme uitwerkingen

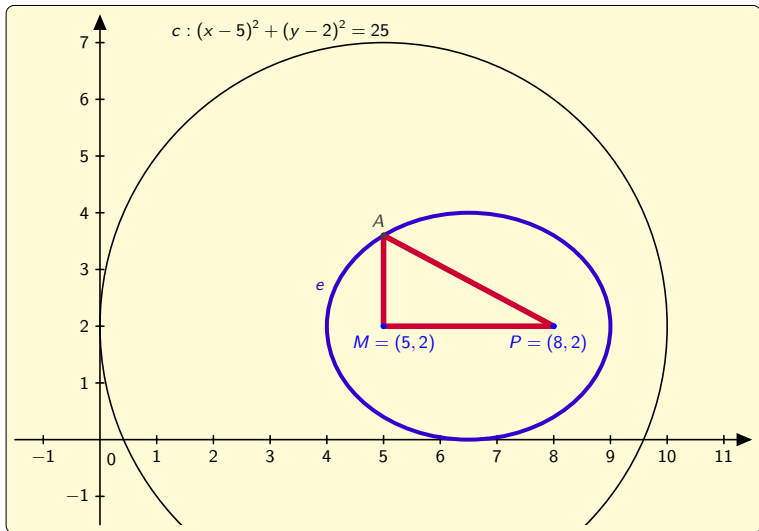


stand

cirkel

van
de

Slimme uitwerkingen



stand

cirkel

van
de

(b) Omtrek $\triangle MPA = 3 + 5 = 8$.

Resultaten

Leerling 1:

- Zowel tijdens pre- als posttest **weinig kennis en inzicht**
- Snel **teruggrijpen naar rekenwerk**, ook nog tijdens de posttest
- **Geen verrijking** van cognitieve eenheden waargenomen

Resultaten

Leerling 1:

- Zowel tijdens pre- als posttest **weinig kennis en inzicht**
- Snel **teruggrijpen naar rekenwerk**, ook nog tijdens de posttest
- **Geen verrijking** van cognitieve eenheden waargenomen
 - Enige associaties met meetkundige definities (brandpunten genoemd)
 - Geen koppeling formule aan positie in het assenstelsel
 - Geen gebruik van symmetrie of meetkundige bewijstechnieken gemaakt
 - Constante somafstand niet gebruikt

Resultaten

Leerling 1:

- Zowel tijdens pre- als posttest **weinig kennis en inzicht**
- Snel **teruggrijpen naar rekenwerk**, ook nog tijdens de posttest
- **Geen verrijking** van cognitieve eenheden waargenomen
 - Enige associaties met meetkundige definities (brandpunten genoemd)
 - Geen koppeling formule aan positie in het assenstelsel
 - Geen gebruik van symmetrie of meetkundige bewijstechnieken gemaakt
 - Constante somafstand niet gebruikt

Leerling 2:

- Enorme **voortgang in associaties** bij ellipsen
- Gebruikt gemaakt van **verschillende representaties**
- **Nadenken** voordat er gerekend wordt
- **Aanzienlijke verrijking** van cognitieve eenheden

Resultaten

Leerling 1:

- Zowel tijdens pre- als posttest **weinig kennis en inzicht**
- Snel **teruggrijpen naar rekenwerk**, ook nog tijdens de posttest
- **Geen verrijking** van cognitieve eenheden waargenomen
 - Enige associaties met meetkundige definities (brandpunten genoemd)
 - Geen koppeling formule aan positie in het assenstelsel
 - Geen gebruik van symmetrie of meetkundige bewijstechnieken gemaakt
 - Constante somafstand niet gebruikt

Leerling 2:

- Enorme **voortgang in associaties** bij ellipsen
- Gebruikt gemaakt van **verschillende representaties**
- **Nadenken** voordat er gerekend wordt
- **Aanzienlijke verrijking** van cognitieve eenheden
 - Beide meetkundige definities en de correcte vergelijking genoemd
 - Associatie met toppen, raaklijnen, poollijnen en translaties
 - Koppeling formule aan ligging in assenstelsel
 - Gebruikt gemaakt van symmetrie and meetkundige bewijstechnieken
 - Constante somafstand slim gebruikt

Resultaten

Leerling 3:

- Vooruitgang in associaties bij ellipsen
- Verband tussen standaardvergelijking en figuur verbeterd
- Bij posttest meetkundige definitie toegepast in analytische opgave
- Enige verrijking van cognitieve eenheden

Resultaten

Leerling 3:

- **Vooruitgang in associaties** bij ellipsen
- **Verband tussen standaardvergelijking en figuur verbeterd**
- Bij posttest **meetkundige definitie toegepast** in analytische opgave
- **Enige verrijking** van cognitieve eenheden
 - Eén meetkundige definitie en de correcte vergelijking genoemd
 - Koppeling formule aan ligging in assenstelsel
 - Gebruikgemaakt van symmetrie
 - Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt voor raaklijn
 - Na aansporing ingezien dat de constante somafstand gebruikt kon worden

Resultaten

Leerling 3:

- Vooruitgang in associaties bij ellipsen
- Verband tussen standaardvergelijking en figuur verbeterd
- Bij posttest meetkundige definitie toegepast in analytische opgave
- Enige verrijking van cognitieve eenheden
 - Eén meetkundige definitie en de correcte vergelijking genoemd
 - Koppeling formule aan ligging in assenstelsel
 - Gebruikgemaakt van symmetrie
 - Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt voor raaklijn
 - Na aansporing ingezien dat de constante somafstand gebruikt kon worden

Leerling 4:

- Bij posttest meer associaties, hoewel pas na aansporing
- Weinig inzicht toegepast bij de opgaven
- Meer kennis, maar nog zwakverbonden cognitieve eenheden

Resultaten

Leerling 3:

- **Vooruitgang in associaties** bij ellipsen
- **Verband tussen standaardvergelijking en figuur verbeterd**
- Bij posttest **meetkundige definitie toegepast** in analytische opgave
- **Enige verrijking** van cognitieve eenheden
 - Eén meetkundige definitie en de correcte vergelijking genoemd
 - Koppeling formule aan ligging in assenstelsel
 - Gebruikgemaakt van symmetrie
 - Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt voor raaklijn
 - Na aansporing ingezien dat de constante somafstand gebruikt kon worden

Leerling 4:

- Bij posttest **meer associaties**, hoewel pas na aansporing
- **Weinig inzicht toegepast** bij de opgaven
- Meer kennis, maar nog **zwakverbonden cognitieve eenheden**
 - Beide meetkundige definities genoemd (hoewel **niet direct**)
 - Gebruikgemaakt van symmetrie
 - Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt voor raaklijn
 - Na **aansporing** ingezien dat de constante somafstand gebruikt kon worden

Conclusies

“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”

Conclusies

“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”

Soms...

- Eén leerling is weinig vooruitgegaan
- Eén leerling is aanzienlijk vooruitgegaan
- Twee leerlingen zijn enigszins vooruitgegaan

Conclusies

“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”

Soms...

- Eén leerling is weinig vooruitgegaan
- Eén leerling is aanzienlijk vooruitgegaan
- Twee leerlingen zijn enigszins vooruitgegaan

Oorzaken voor verminderd effect:

- Weinig zelfvertrouwen
- Te weinig langetermijnpotentiatie

Aanbevelingen

Vragen en ideeën voor de toekomst:

- Onder welke **voorwaarden** treedt de meeste verrijking op?
- Werkt deze methode ook voor **andere leerlingen**, scholen, niveaus?
- **Uitproberen** van huidige lesmethode op enthousiaste leerlingen
- Gebruik van **kwantitatieve** technieken

Aanbevelingen

Vragen en ideeën voor de toekomst:

- Onder welke **voorwaarden** treedt de meeste verrijking op?
- Werkt deze methode ook voor **andere leerlingen**, scholen, niveaus?
- **Uitproberen** van huidige lesmethode op enthousiaste leerlingen
- Gebruik van **kwantitatieve** technieken

- Rijke cognitieve eenheden krijg je **niet vanzelf!**

Tips voor in de les

Symmetrie

- Constructie ellips met behulp van GeoGebra
- Eigenschap van gelijke somafstand toegelicht
- Standaardvergelijking ellips in verband gebracht met figuur
- Constructie parabool met behulp van GeoGebra
- Standaardvergelijking parabool afgeleid
- Standaardvergelijking hyperbool in verband gebracht met figuur
- Extra opgave over ellipsen symmetrisch in $y = x$
- Extra opgave over symmetrie van analytisch gegeven krommen
- Visualisatie over translatie van ellipsen

Tips voor in de les

Symmetrie

- Constructie ellips met behulp van GeoGebra
- Eigenschap van **gelijke somafstand** toegelicht
- **Standaardvergelijking ellips** in verband gebracht met figuur
- Constructie parabool met behulp van GeoGebra
- **Standaardvergelijking parabool** afgeleid
- **Standaardvergelijking hyperbool** in verband gebracht met figuur
- **Extra opgave over ellipsen symmetrisch in $y = x$**
- Extra opgave over **symmetrie van analytisch gegeven krommen**
- Visualisatie over **translatie van ellipsen**

De lessen

Parametervoorstellingen

- Visualisatie van een [cirkel met een poollijn](#)
- Extra opgave over [raaklijnen na een translatie](#)
- Visualisatie van raaklijnen na een translatie
- Visualisatie van [verkleiningen van cirkels](#)
- Extra opgave over verkleiningen van cirkels
- Extra opgave over [geparametriseerde ellipsen](#)

De lessen

Parametervoorstellingen

- Visualisatie van een cirkel met een poollijn
- Extra opgave over raaklijnen na een translatie
- Visualisatie van raaklijnen na een translatie
- Visualisatie van verkleiningen van cirkels
- Extra opgave over verkleiningen van cirkels
- Extra opgave over geparametriseerde ellipsen

Vragen

